CHAPITRE 1 : Circuits électriques dans l'ARQS

1. Introduction

L'électricité est une forme d'énergie produite par la circulation de charges électriques dans un corps conducteur (aluminium, cuivre) ou semi-conducteur. L'étude du mouvement de ces charges électriques et des phénomènes qui s'y rattachent est l'électrocinétique. C'est une branche de l'électricité qui étudie les circuits électriques dans le cadre de l'approximation des états (ou régimes) quasi-stationnaires (quasi-permanent) qu'on note $ARQP$ ou $ARQS$.

2. Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS)

L'approximation des régimes quasi-stationnaires consiste à considérer l'électricité comme un fluide parfait et incompressible dont le débit (l'intensité) se conserve le long d'un conducteur. En d'autres termes, à t donné, l'intensité du courant qui entre à l'extrémité d'un conducteur est **exactement** identique à celle qui sort de l'autre extrémité.

Par définition, on dira qu'un circuit de dimension L vérifie **l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS)** si la grandeur temporelle τ liée au circuit est négligeable devant la grandeur temporelle T (ce peut être une période, une fréquence ou une pulsation) caractéristique de l'évolution des grandeurs électriques :

$$\boxed{T \gg \tau = \frac{L}{c} \quad soit \quad L \ll cT}$$

où $c = 3.10^8 ms^{-1}$ est la célérité de la lumière dans le vide.

3. Charges et courant électrique

3.1. Types de courants électriques

Le courant électrique dans un circuit correspond à un mouvement ordonné de charges électriques (appelées aussi porteurs de charges) sans tenir compte du mouvement microscopique désordonné de ces charges. Il existe différents types de courant :

- **Le courant de conduction** qui correspond au déplacement de charges électriques dans un support matériel conducteur :
  - ✓ dans les conducteurs usuels (par exemple les métaux) les porteurs de charge sont les électrons de charge négative $q = -e$;

- ✓ dans les semi-conducteurs, les porteurs de charge sont soit des électrons (semi-conducteurs dopés n), soit des trous de charge $q = +e$ (semi-conducteurs dopés p)
- ✓ dans les électrolytes, les porteurs de charge sont des ions en solution (cations et anions).

- **Le courant de convection** (type courant d'air) causé par le déplacement d'un objet lui-même chargé (par exemple des ions dans l'air).
- **Le courant de particules** dû aux déplacements de particules chargées dans le vide par exemple des électrons dans le tube d'un oscilloscope.

NB : On s'intéressera uniquement **au courant de conduction** dans tout le reste du cours.

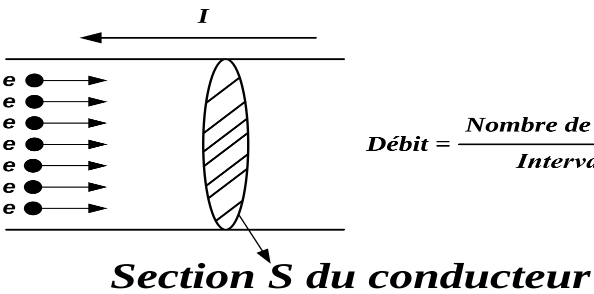
Une charge électrique dq qui traverse une section de circuit S pendant un intervalle de temps dt crée un courant d'intensité i tel que :

$$\boxed{i = \frac{dq}{dt} \quad \leftrightarrow q = \int idt}$$

i : intensité en ampère (A) ; q : charge en coulomb (C) ; t : temps en seconde (s)

3.2. Densité de courant

Supposons un conducteur de section dS (par exemple $dS = 1\ cm^2$) qui contient des porteurs de charges mobiles.



$$\text{Débit} = \frac{\text{Nombre de charges traversant la section } S}{\text{Intervalle de temps d'observation}}$$

On considère l'établissement d'un champ électrique $\vec{E}$ qui permet le déplacement des charges électriques avec une vitesse proportionnelle à $\vec{E}$. Cette vitesse notée $\vec{v}$ est égale à :

$$\vec{v} = \mu.\vec{E}$$

μ représente la mobilité des charges exprimée en $m^2.V^{-1}.s^{-1}$

En un intervalle de temps égal à 1 seconde, un certain nombre de charges N traversent la surface considérée

$$N = \vec{v}.n.\overrightarrow{dS}.dt = \vec{v}.n.1cm^2.1s$$

n étant la densité de charges c'est-à-dire le nombre de porteurs par unité de volume.

La charge électrique qui traverse la section en une seconde devient :

$$dQ = qN = q.\vec{v}.n.\overrightarrow{dS}.dt$$

Le flux d'électrons qui circule dans le conducteur est appelé courant électrique i. Son intensité s'exprime en ampère (A).

$$\boxed{i = \frac{dq}{dt} = \vec{J}.\overrightarrow{dS}}$$

dq représente la quantité de charges en coulomb traversant la section dS pendant l'intervalle de temps dt. $\vec{J}$ représente le vecteur densité de courant exprimé en $A.m^{-2}$.

La densité du courant est liée à la vitesse $\vec{v}$ d'ensemble des porteurs de charges mobiles, et à leur densité volumique de charges locales ρ_v.

$$\boxed{\vec{J} = \rho_v.\vec{v}}$$

En remplaçant la vitesse par son expression, nous obtenons :

$$\boxed{\vec{J} = \rho_v.\mu.\vec{E} = \sigma.\vec{E}}$$

σ représente la conductivité électrique du conducteur exprimé en siemens par mètre ($S.m^{-1}$). Cette expression représente la forme locale de la loi d'ohm. La résistivité du conducteur qui est l'inverse de la conductivité s'exprime par :

$$\boxed{\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (\Omega.\mathrm{m})}$$

Dans le cas particulier d'un conducteur cylindrique à section constante S, nous pouvons déterminer la résistance R ou la conductance G d'un tronçon de conducteur de longueur ℓ :

$$\boxed{R = \rho.\frac{\ell}{S} \ (\Omega)\ ;\ G = \sigma.\frac{S}{\ell} \ (\Omega^{-1})}$$

La résistance R transforme l'énergie électrique reçue en énergie thermique par dégagement de chaleur. Ce phénomène est connu sous le nom d'effet joule.

Exercice d'application

Un conducteur de cuivre, cylindrique, de section $S = 1\ mm^2$et de longueur $\ell = 10\ m$, est parcouru par un courant constant de 5 A. Calculer :

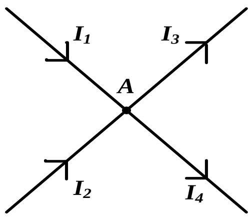
- ✓ la densité volumique des charges mobiles. On admettra qu'un mètre cube de cuivre renferme $8{,}37.10^{28}$ atomes et on supposera qu'en moyenne chaque atome de cuivre libère un électron ;
- ✓ la norme du vecteur densité de courant $\vec{J}$;

- ✓ la norme du vecteur vitesse $\vec{v}$, vitesse d'entraînement des électrons libres ;
- ✓ la mobilité des électrons libres, en adoptant pour conductivité du cuivre $1/1{,}6.10^{-8}\ \Omega.\mathrm{m}$;
- ✓ la norme du champ $\vec{E}$ et la ddp entre les extrémités du conducteur (sachant que le conducteur n'est le siège d'un champ électromoteur).

3.3. Loi des nœuds

On appelle nœud un point de jonction (raccordement) entre au moins trois fils de connexion. Dans le cadre de l'ARQS, la somme des intensités I_i des courants algébriques arrivant à un nœud du circuit est égale à la somme des intensités I_j des courants algébriques s'éloignant de ce nœud.

$$\boxed{\sum_{arrivant} I_i = \sum_{sortant} I_j}$$



Au nœud $\boldsymbol{A}$ on a : $\boldsymbol{I_1 + I_2 = I_3 + I_4}$.

3.4. Loi des mailles

Par analogie hydraulique, l'intensité du courant est comparée à un débit d'eau, la section du conducteur correspondant à la section du tuyau. En électricité, le générateur joue le rôle d'une pompe où l'eau est remplacée par des charges électriques. La différence d'état électrique (équivalent de la pression) est appelée différence de potentiel ou tension électrique. C'est une grandeur algébrique qui mesure la tendance des charges de se rendre de A vers B. La différence de potentiel entre deux points A et B s'exprime par la quantité u telle que :

$$\boxed{\boldsymbol{u_{AB} = V_A - V_B \quad (Volt)}}$$

- ➢ On appelle branche un ensemble de dipôles montés en série entre deux nœuds.
- ➢ On appelle maille un ensemble de branches formant un contour fermé. **Une maille peut être orientée arbitrairement**. Dans une maille, la somme algébrique des différences de potentiel mesurées en parcourant complètement la maille dans un sens donné est nulle.

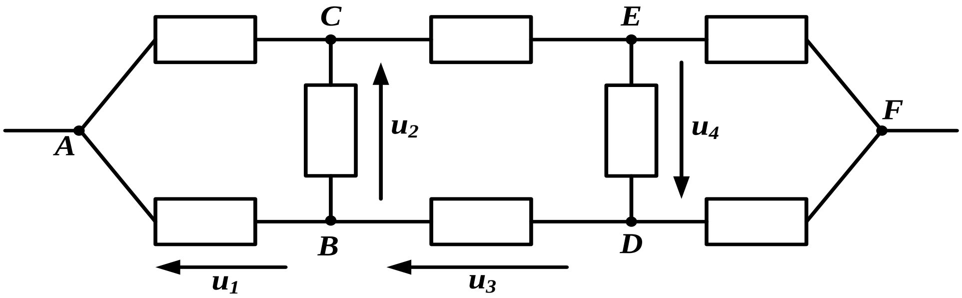
$$\boxed{\sum_{maille} \boldsymbol{u_i = 0}}$$

3.5. Loi des branches

Dans le cadre de l'ARQS, l'intensité i est la même en tout point d'une branche : elle ne dépend pas de l'abscisse x le long de la branche.

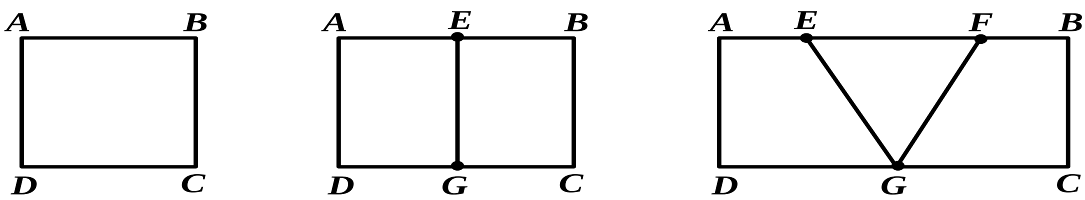
- **Exercice d'application**

On considère le circuit suivant. On a mesuré les potentiels des points A, F tels que : $V_A = 7V$ et $V_F = -2V$. Sachant que $u_1 = 4V$; $u_2 = 2V$; $u_3 = 1V$; $u_4 = 2V$; Déterminer les potentiels des points B, C, D, E. Préciser le point relié à la masse.



- **Exercice d'application**

Déterminer toutes les mailles et toutes les branches dans les différentes configurations suivantes :



4. Dipôles électriques

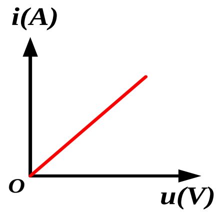
4.1. Définition

Un dipôle électrocinétique est un élément électrique capable ou non de fournir de l'énergie, communiquant avec l'extérieur seulement par deux bornes. À tout instant, le courant entrant par une borne est égal au courant sortant par l'autre. On en distingue deux grandes catégories :

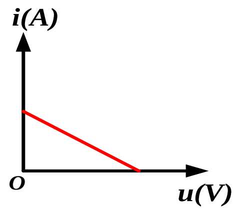
- ✓ les dipôles passifs dans lesquels, il y a simplement transformation d'énergie électrique en énergie calorifique. Exemple : résistances, four électrique, radiateur.
- ✓ les dipôles actifs dans lesquels, en plus de l'énergie calorifique, apparaissent d'autres formes d'énergie : Exemple : les générateurs, les récepteurs.

4.2. Caractéristique d'un dipôle

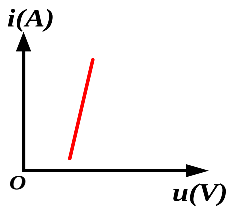
- Soit un dipôle quelconque, traversé par un courant d'intensité i, et soit u la difference de potentiel aux bornes de ce dipôle. **La caractéristique du dipôle** est la courbe représentative de la fonction $i = f(u)$. Selon l'allure de la caractéristique on distingue :
  - ✓ Les dipôles linéaires, pour lesquels la caractéristique est un segment de droite ; Exemple : résistance ohmique (résistor), accumulateur, voltamètre ;



Résistance Ohmique



Accumulateur



Voltamètre

  - ✓ Les dipôles non-linéaires pour lesquels la caractéristique n'est pas un segment de droite. Exemple : une diode, un moteur…

- Un point de coordonnées (u_1, i_1), données de la caractéristique correspondant aux conditions de fonctionnement du dipôle, est appelé **point de fonctionnement.**
  - ✓ **La résistance statique** du dipôle au point de fonctionnement s'écrit :

$$\boxed{R_s = \frac{u_1}{i_1}}$$

Elle suffit à l'étude des régimes continus.

  - ✓ **La résistance dynamique** du dipôle au point de fonctionnement s'écrit :

$$\boxed{R_d = \left(\frac{du}{di}\right)_{u_1, i_1}}$$

Elle est utile pour aborder l'étude des régimes sinusoïdaux.

R_d peut être négative. Quand la caractéristique est linéaire on a : $R_s = R_d$. Dans le cas contraire $R_s \neq R_d$.

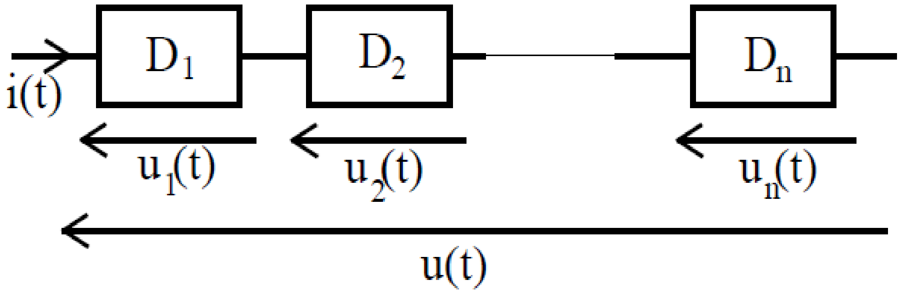
Remarque importante : la caractéristique d'un dipôle dépend de la convention dans laquelle on se place.

4.3. Association de dipôles

Il existe deux types d'association de dipôles : l'association série et l'association parallèle.

4.3.1.Association série

Il y a association série de dipôles lorsque ceux-ci sont traversés à tout instant par le même courant $i(t)$ dans le cadre de l'ARQS.

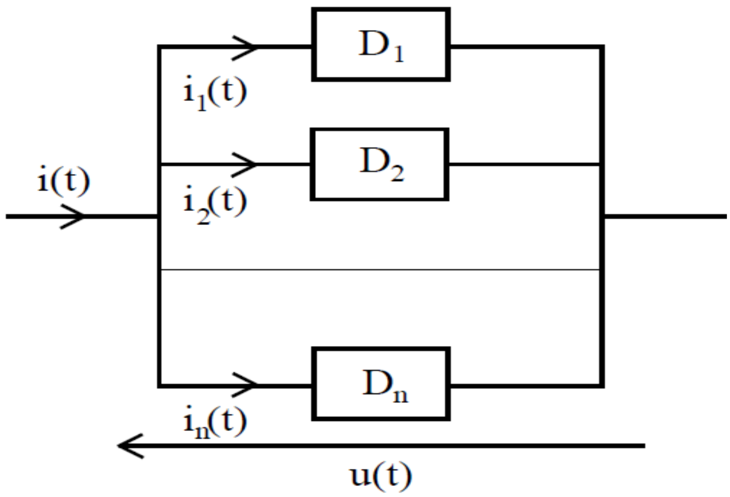


En adoptant la même convention d'orientation des tensions pour chaque dipôle, l'association série des dipôles est équivalente à un dipôle unique traversé par le courant $i(t)$ et soumis à la tension $u(t)$ égale à la somme des tensions aux bornes de chacun des dipôles par application de la loi des mailles :

$$\boxed{\boldsymbol{u(t) = \sum_k u_k(t) \quad et \quad i_k(t) = i(t)\,, \qquad \forall k}}$$

4.3.2. Association parallèle

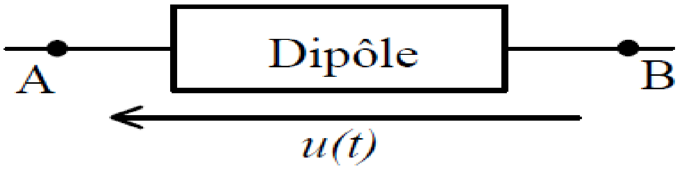
Il y a association parallèle de dipôles lorsque ceux-ci sont soumis à tout instant à la même tension $u(t)$ à leurs bornes. En adoptant la même convention d'orientation des courants pour chaque dipôle, l'association parallèle est équivalente à un dipôle unique soumis à la tension $u(t)$ et traversé par le courant $i(t)$ égal à la somme des courants traversant chacun des dipôles, par application de la loi des nœuds dans le cadre de l'ARQS :



$$\boxed{\boldsymbol{i(t) = \sum_k i_k(t) \quad et \quad u_k(t) = u(t)\,, \qquad \forall k}}$$

4.4. Puissance électromagnétique reçue par un dipôle

Soit un dipôle D traversé par un courant électrique $i(t)$ maintenant une tension entre ses bornes u_{AB}.



$$u(t) = V_A - V_B$$

La puissance électromagnétique reçue par le dipôle D est donnée par la relation :

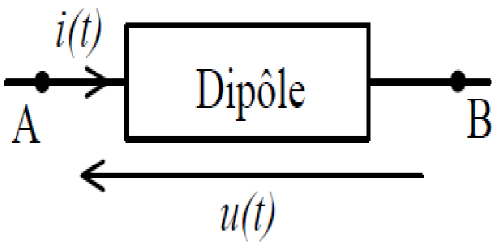
$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{P} = u(t).i(t)}}$$

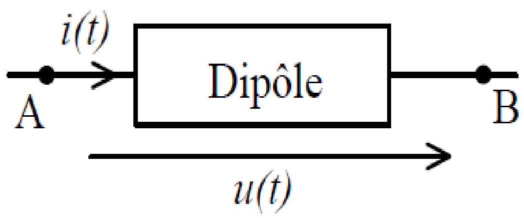
On en déduit l'énergie reçue pendant la durée $t_f - t_i$ qui est égale à :

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{E} = \int_{t_i}^{t_f} u(t).i(t)dt}}$$

4.5. Convention générateur et récepteur

Placé dans un circuit, un dipôle réalise une conversion énergétique : il fonctionne ainsi soit en mode récepteur (il prélève de l'énergie électrique au circuit), soit en mode générateur (il cède de l'énergie électrique au circuit. En convention générateur (respectivement récepteur), si l'intensité traversant un dipôle et la tension à ses bornes ont le même signe, alors le dipôle possède un caractère générateur (respectivement récepteur). La figure suivante représente schématiquement les 2 conventions.





Convention récepteur

$\boldsymbol{i(t) = i_{AB}(t)\,;\quad u(t) = V_A - V_B}$

Convention générateur

$\boldsymbol{i(t) = i_{AB}(t)\,;\quad u(t) = V_B - V_A}$

Il est commode d'utiliser l'une ou l'autre des conventions selon la nature connue ou présumée du dipôle. Mais il arrive souvent qu'après avoir fini le calcul, l'une ou l'autre des quantités déterminées soit négative. Nous pouvons nous référer au tableau suivant :

Tableau : Tableau récapitulatif des conventions

u	$+$	$-$	$+$	$-$
i	$+$	$+$	$-$	$-$
Convention récepteur	Le dipôle réel est un récepteur $\mathcal{P} > 0$	Le dipôle réel est un générateur $\mathcal{P} < 0$	Le dipôle réel est un générateur $\mathcal{P} < 0$	Le dipôle réel est un récepteur $\mathcal{P} > 0$
Convention générateur	Le dipôle réel est un générateur $\mathcal{P} > 0$	Le dipôle réel est un récepteur $\mathcal{P} < 0$	Le dipôle réel est un récepteur $\mathcal{P} < 0$	Le dipôle réel est un générateur $\mathcal{P} > 0$

Comment déterminer le caractère générateur/récepteur d'un dipôle

Soit un dipôle traversé par l'intensité algébrique i et soumis à la différence de potentiel u. On cherche à déterminer si ce dipôle est générateur ou récepteur.

1) **Identifier une convention pour l'étude de ce dipôle :**

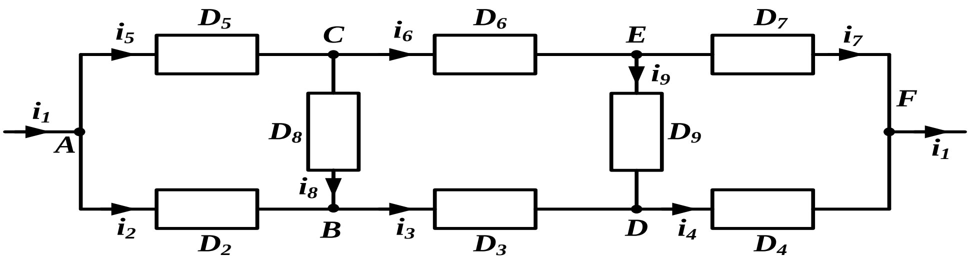
- si u et i sont orientés dans le même sens, on identifie la convention générateur ;
- si u et i sont orientés en sens inverse, on identifie la convention récepteur.

2) **Déterminer le signe de la puissance algébrique $\mathcal{P} = ui$ dans la convention choisie :**

- si $\mathcal{P} > 0$, alors le dipôle est de même nature que la convention (générateur - générateur ou récepteur - récepteur) ;
- si $\mathcal{P} < 0$, alors le dipôle est de nature opposée à la convention (générateur - récepteur ou récepteur - générateur).

Exercice d'application

On considère le circuit suivant dans lequel circulent des courants.



1. On donne $i_1 = 2\,A$; $i_2 = 1\,A$; $i_3 = 0{,}5\,A$; $i_4 = 1{,}5\,A$ Déterminer les courants i_5 ; i_6; i_7; i_8 et i_9.
2. On a mesuré les potentiels des points A, B, C, D, E, F tels que : $V_A = 7V$; $V_B = 3V$; $V_C = 5V$; $V_D = 2V$; $V_E = 0V$ et $V_F = -2V$. Déterminer la puissance reçue par chaque dipôle. Préciser ceux qui sont générateurs et ceux qui sont récepteurs.

4.6. Dipôles passifs linéaires

Trois dipôles passifs linéaires sont couramment utilisés dans les circuits électriques. Ils ont la particularité de posséder un fonctionnement qui s'exprime sous la forme d'une équation différentielle simple, linéaire, à coefficients constants. Ce sont la résistance, le condensateur et la bobine.

4.6.1. Dipôle résistif idéal

Un résistor est modélisé par une résistance R telle que :

- en convention récepteur, il vérifie $u = Ri$
- en convention générateur, il vérifie $u = -Ri$

Pour un fil cylindrique de section S, de longueur ℓ et de résistivité ρ , la résistance R a pour expression :

$$\boxed{R = \frac{1}{G} = \rho\frac{\ell}{S} = \frac{1}{\sigma}\frac{\ell}{S} \qquad G(S); \rho\ (\Omega.m); \sigma(S.m^{-1})}$$

ρ représente la résistance du fil de section de 1 m^2 et de longueur 1 m. Il en est de même pour σ.

4.6.1.1. Loi d'association des résistances

➢ **Association en série**

Des résistances sont montées en série si elles sont traversées par le même courant. Il vient pour la résistance équivalente R_{eq}:

$$\boxed{R_{eq} = \sum_{i=1}^{N} R_i}$$

➢ **Association en parallèle**

Des résistances sont montées en parallèles si elles sont maintenues par la même tension. Il vient pour la résistance équivalente R_{eq} :

$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}}$$

NB : Cette loi sera généralisable aux autres dipôles linéaires une fois la notion d'impédance introduite.

4.6.1.2. Aspect énergétique du dipôle résistif idéal : Effet joule

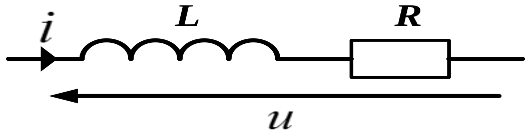
La puissance reçue par un dipôle résistif idéal appelée effet joule et entièrement dégradée sous forme thermique à pour expression :

$$\boxed{P_{reçue} = Ri^2}$$

Dans un premier temps, la température du conducteur ohmique augmente jusqu'à atteindre une valeur constante. Lorsque l'équilibre thermique est atteint, la puissance thermique dissipée par le conducteur ohmique est alors égale à la puissance électrique reçue par le dipôle.

4.6.2.Dipôle auto-inductif

Le dipôle auto-inductif (inductance ou bobine) est un fil conducteur enroulé sur un isolant. On le modélise par une inductance L en série avec une résistance R.



Loi fondamentale :

- En convention récepteur, il vérifie :

$$\boxed{u = L\frac{di}{dt} + Ri}$$

- En convention générateur, il vérifie :

$$\boxed{u = -L\frac{di}{dt} - Ri}$$

où L est l'inductance du dipôle. Elle s'exprime en Henry (H), ou en $\Omega.s$ indépendante du temps. Pour une bobine idéale $(R = 0)$.

4.6.2.1. Loi d'association de dipôles auto-inductifs idéaux

- **Association en série**

$$\boxed{L_{eq} = \sum_{i=1}^{N} L_i = L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_N}$$

- **Association en parallèle**

$$\boxed{\frac{1}{L_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{L_i} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \cdots + \frac{1}{L_N}}$$

4.6.2.2. Aspect énergétique de l'inductance idéale

La puissance reçue par une inductance idéale s'écrit indépendamment de la convention retenue :

$$\mathcal{P} = ui = Li\frac{di}{dt} \quad \text{ou} \quad \mathcal{P} = -ui = -(-Li)\frac{di}{dt} = Li\frac{di}{dt}$$

Contrairement au cas de la résistance, cette puissance n'est pas nécessairement positive. Nous obtenons l'énergie convertie entre deux instants t_1 et t_2 en calculant l'intégrale temporelle de la puissance.

$$\Delta\mathcal{E} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} ui\,dt = \int_{t_1}^{t_2} Li\frac{di}{dt}dt = \int_{t_1}^{t_2} Lidi = \left[\frac{1}{2}Li^2(t)\right]_{t_1}^{t_2}$$

$$\boxed{\Delta\mathcal{E} = \underbrace{\frac{1}{2}Li^2(t_2)}_{\text{énergie stockée en } t_2} - \underbrace{\frac{1}{2}Li^2(t_1)}_{\text{énergie stockée en } t_1} = \mathcal{E}_2(t_2) - \mathcal{E}_1(t_1)}$$

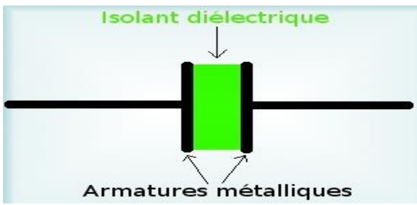
L'énergie électrique $\Delta\mathcal{E}$ échangée par l'inductance idéale entre t_1 et t_2 est ainsi égale à la différence d'énergie stockée à chacun de ces instants. Une bobine idéale ne consomme pas de l'énergie. Celle-ci est simplement stockée en attendant d'être évacuée. L'énergie $\mathcal{E}_L$ stockée par une inductance ne dépend que de l'intensité i qui la traverse et est égale à :

$$\boxed{\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2}$$

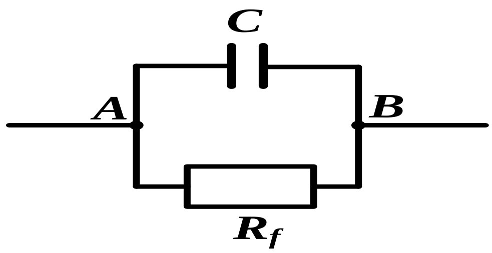
Cette énergie ne pouvant varier instantanément, nous pouvons déduire que : **l'intensité du courant traversant une inductance ne peut subir de discontinuité (varier instantanément). En revanche la tension aux bornes de la bobine peut parfaitement varier d'une façon discontinue.**

4.6.3. Dipôle capacitif

Le dipôle capacitif (condensateur) est un composant passif constitué de deux conducteurs appelés armatures, séparés par un diélectrique ou isolant (papier, mica ou air). Il s'agit d'un réservoir d'énergie électrostatique capable d'emmagasiner l'énergie dans un champ électrique.

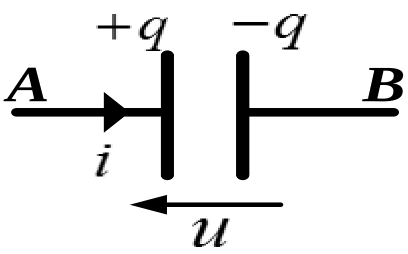


Lorsque la tension est variable sur un cycle, l'énergie sera stockée durant une partie du cycle puis restituée durant l'autre partie du cycle. On le modélise par une capacité C en parallèle avec une résistance de fuite R_f. Un condensateur est dit idéal si R_f tend vers l'infini.



Les conventions de représentation du dipôle capacitif sont :

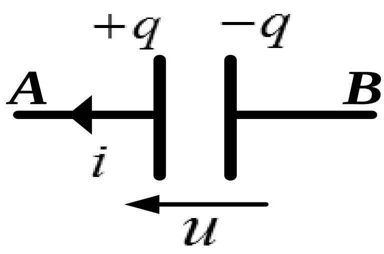
Convention récepteur



$$u = \frac{q}{C}\ ;\ i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt} > 0$$

Le condensateur se charge

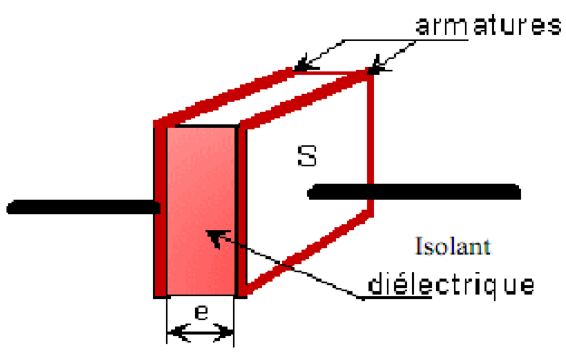
Convention générateur



$$u = \frac{q}{C}\ ;\ i = -\frac{dq}{dt} = -C\frac{du}{dt} < 0$$

Le condensateur se décharge

Soit un condensateur plan constitué de deux armatures de même surface S. Ces armatures sont séparées généralement par un diélectrique de permittivité relative ε_r et d'épaisseur e.



La capacité du condensateur est donnée par l'expression suivante :

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{e} \quad avec\ \ \varepsilon_0 = \frac{1}{36 \times \pi \times 10^9} = 8,854\,187.10^{-12}\ F.m^{-1}}$$

ε_0 est la permittivité du vide et ε_r est la permittivité relative. S est m^2, e en m.

4.6.3.1. Loi d'association de dipôles capacitifs

- **Association en série**

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_N}}$$

- **Association en parallèle**

$$\boxed{C_{eq} = \sum_{i=1}^{N} C_i = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_N}$$

4.6.3.2. Aspect énergétique du dipôle capacitif

La puissance reçue par une capacité idéale s'écrit indépendamment de la convention retenue :

$$\mathcal{P} = ui = Cu\frac{du}{dt} \quad \text{ou} \quad \mathcal{P} = -ui = -\left(-Cu\frac{du}{dt}\right) = Cu\frac{du}{dt}$$

Nous obtenons l'énergie convertie entre deux instants t_1 et t_2 en calculant l'intégrale temporelle de la puissance.

$$\Delta\mathcal{E} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} ui\,dt = \int_{t_1}^{t_2} Cu\frac{du}{dt}dt = \int_{t_1}^{t_2} Cudu = \left[\frac{1}{2}Cu^2(t)\right]_{t_1}^{t_2}$$

$$\boxed{\Delta\mathcal{E} = \underbrace{\frac{1}{2}Cu^2(t_2)}_{\text{énergie stockée en } t_2} - \underbrace{\frac{1}{2}Cu^2(t_1)}_{\text{énergie stockée en } t_1} = \mathcal{E}_2(t_2) - \mathcal{E}_1(t_1)}$$

L'énergie électrique $\Delta\mathcal{E}$ échangée par la capacité idéale entre t_1 et t_2 est ainsi égale à la différence d'énergie stockée à chacun de ces instants. Une capacité idéale ne consomme pas d'énergie; cette dernière est simplement stockée en attendant d'être évacuée. L'énergie stockée notée $\mathcal{E}_C$ par le condensateur au bout d'un temps t est égale à :

$$\boxed{\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}Cu^2}$$

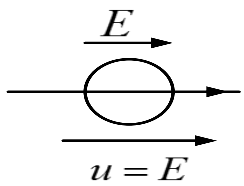
De cette énergie nous pouvons déduire que : **ni la charge, ni la tension aux bornes d'un condensateur ne peuvent varier instantanément. En revanche, le courant qui traverse le condensateur peut subir une discontinuité (varier instantanément).**

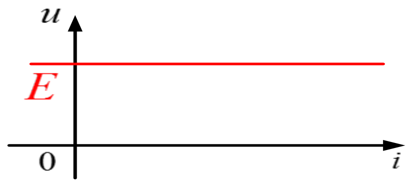
La puissance électrocinétique reçue par le condensateur peut être négative et traduire une restitution d'énergie au circuit.

4.7. Dipôles actifs linéaires

4.7.1.Générateur de tension idéal

Un générateur idéal de tension impose une tension constante E à ses bornes quel que soit le courant i, positif ou negatif débité par celui-ci. La caractéristique $u = f(i)$ d'un générateur idéal de tension est une droite horizontale. La puissance fournie par un tel générateur est $\boldsymbol{\mathcal{P}_g = Ei}$.





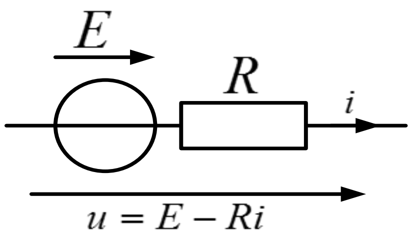
4.7.2.Générateur de tension réel

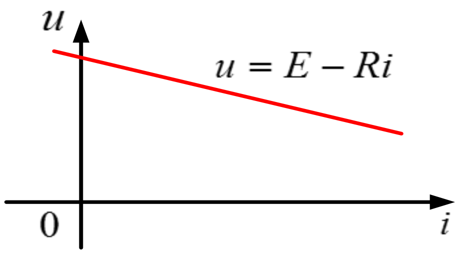
4.7.2.1. Définition

Un générateur de tension réel est une source d'énergie caractérisée par une force électromotrice (f.é.m.) E en série avec une résistance interne R. Lorsqu'il est parcouru par un courant i, la ddp à ses bornes est :

$$\boxed{\boldsymbol{u = E - Ri}}$$

E est aussi appelée ddp à vide, c'est-à-dire le générateur ne débite pas de courant.





4.7.2.2. Puissance fournie par un générateur de tension

La puissance fournie par un tel générateur est $\boldsymbol{\mathcal{P}_g = ui = Ei - Ri^2}$.

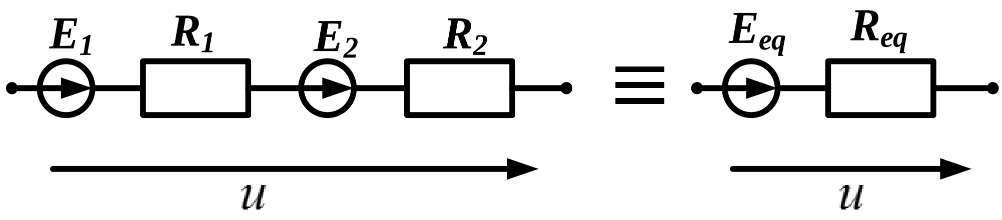
- Le terme $\boldsymbol{Ei}$ represente la puissance fournie par le générateur idéal de tension
- Le terme $\boldsymbol{Ri^2}$ représente la puissance dissipée par effet joule dans la résistance interne.

4.7.2.3. Association de générateurs de tension en série

L'association en série de N générateurs de tension réels est équivalente à un générateur de tension unique tel que :

$$\boxed{\boldsymbol{E_{eq} = \sum_{k=1}^{N} E_k \quad \text{et} \quad R_{eq} = \sum_{k=1}^{N} R_k}}$$

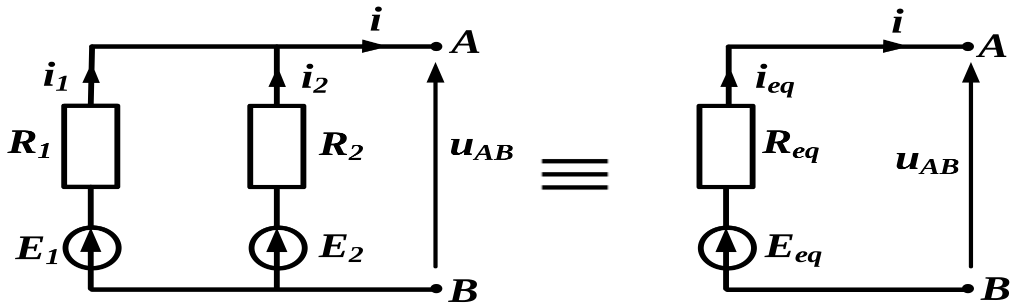
Exemple d'application :



$$\begin{cases} E_{eq} = E_1 + E_2 \\ R_{eq} = R_1 + R_2 \end{cases}$$

4.7.2.4. Association de deux générateurs de tension en parallèle

On suppose que les 2 générateurs de tension sont identiques d'amplitude E et de résistance interne R (**condition à respecter pour la mise en pratique de 2 générateurs de tension en parallèle**).



Dans ce cas nous pouvons calculer la différence de potentiel qui apparait entre A et B. On a d'après la figure :

$$u_{AB} = E - Ri_1 = E - Ri_2 \quad et \quad u_{AB} = E_{eq} - R_{eq}i_{eq} = E_{eq} - R_{eq}i$$

Puisque les deux générateurs sont identiques, ils sont traversés par le même courant :

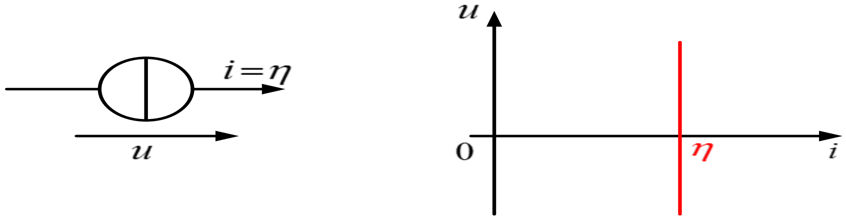
$$i_1 = i_2 = \frac{i}{2} \quad et \;\; u_{AB} = E - R\frac{i}{2} = E - \frac{R}{2}i$$

Nous déduisons que le générateur équivalent de deux générateurs de tension identiques en parallèle a comme caractéristique:

$$\boxed{E_{eq} = E \quad et \quad R_{eq} = \frac{R}{2}}$$

4.7.3. Générateur de courant idéal

Un générateur idéal de courant délivre un courant d'intensité constante η quelle que soit la tension, positive ou négative, aux bornes de celui-ci. La caractéristique d'un générateur idéal de courant est une droite verticale. La puissance fournie par un tel générateur est $\boldsymbol{\mathcal{P}_g = \eta u}$



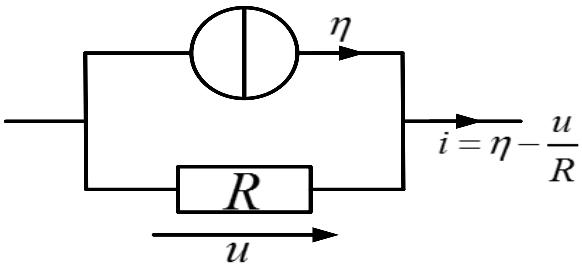
4.7.4.Générateur de courant réel

4.7.4.1. Définition

Un générateur de courant réel est une source d'énergie comme le générateur de tension. Il est caractérisé par une source de courant idéal ou courant électromoteur η en parallèle avec une résistance interne R. Le courant η est aussi appelé courant de court-circuit. Il est constant quelque soit la ddp u aux bornes du générateur de courant.

Lorsque le générateur de courant débite un courant i dans un circuit, i s'écrit :

$$\boxed{i = \eta - \frac{u}{R}}$$

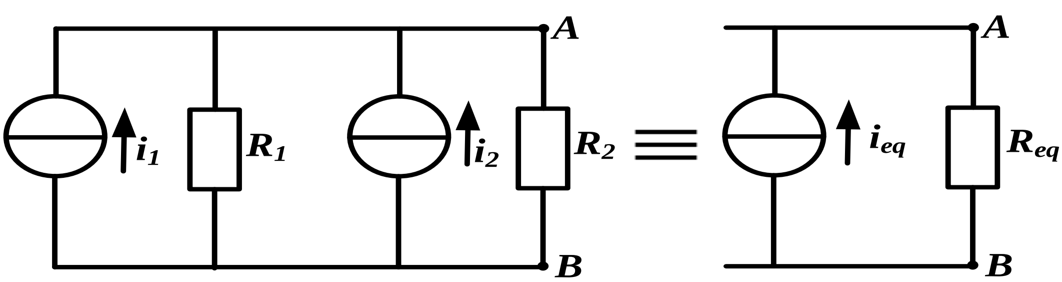


4.7.4.2. Association de générateurs de courant en parallèle

L'association en parallèle de N générateurs de courant est équivalente à un générateur de courant unique tel que :

$$\boxed{i_{eq} = \sum_{k=1}^{N} i_k \quad et \quad G_{eq} = \sum_{k=1}^{N} G_k}$$

<u>Exemple d'application</u> :



$$i_{éq} = i_1 + i_2 \quad et \quad R_{éq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

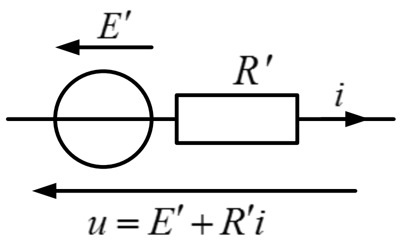
4.7.5.Dipôles récepteurs

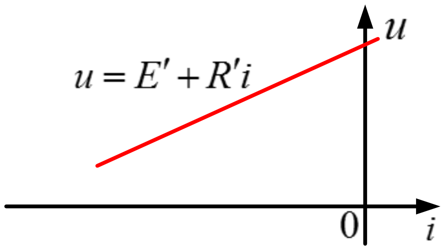
4.7.5.1. Définition

Dans un domaine où elle est linéaire, la caractéristique d'un récepteur réel à pour équation (en convention récepteur) :

$$\boxed{u = E' + R'i}$$

Où E' est la force contre-électromotrice (fcém) du récepteur et R' sa resistance interne en ohm.





4.7.5.2. Puissance fournie par un générateur

La puissance fournie par un tel récepteur est $\mathcal{P}_g = ui = E'i + R'i^2$.

- Le terme $E'i$ représente la puissance utile du récepteur, c'est à dire la fraction de la puissance électrique reçue par le récepteur pouvant être convertie en une forme d'énergie non thermique.
- Le terme $R'i^2$ représente la puissance dissipée par effet joule dans la résistance interne.

Méthode : Application des lois de Kirchhoff à un circuit ramifié

Lorsqu'un circuit est constitué de plusieurs mailles, l'écriture systématique des lois de Kirchhoff conduit généralement à un excès d'information. Pour n'écrire que des relations nécessaires il faut :

1. Dénombrer les nœuds (n) et les mailles indépendantes (m) dans le circuit.
2. Ecrire $(n-1)$ lois des nœuds entre les intensités. Le dernier nœud conduit à une relation redondante. (le nœud inutilisé est indifférent.)

3. Ecrire (m) lois de mailles. (des mailles sont indépendantes si elles comportent chacune un dipôle que ne comportent pas les autres)
4. Injecter les caractéristiques des dipôles dans les lois de mailles, de façon à n'obtenir que des relations entre les intensités (et les grandeurs caractéristiques des dipôles).
5. Résoudre le système constitué de b equations dont les b intensités sont les inconnues avec $b = n + m - 1$.

Exercice d'application

Déterminer les intensités dans le circuit schématisé ci-dessous en fonction des données du problème.